

Pinchover-Rubinstein Exercise 3.7 (p.74)

Józsa Gergely

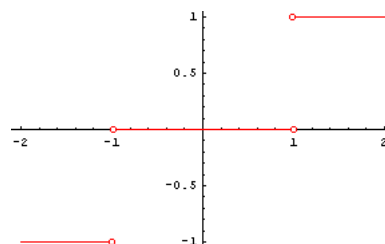
1. Feladat

Tekintsük a következő egyenletet

$$u''_{xx} + 2u''_{xy} + (1 - q(y))u''_{yy} = 0$$

ahol az u''_{yy} együtthatójában szereplő függvény:

$$q(y) = \begin{cases} 1 & y > 1 \\ 0 & |y| < 1 \\ -1 & y < -1 \end{cases}$$



- Milyen értelmezési tartományon hiperbolikus/parabolikus/elliptikus a PDE?
- Hozzuk kanonikus alakra mindhárom tartományon az egyenletet!
- Rajzoljuk le a hiperbolikus karakterisztikákat!

2. Megoldás

- Az egyenletben szereplő együtthatók:

$$a = 1, \quad b = 1, \quad c = 1 - q(y)$$

Így az osztályozás alapja:

$$b^2 - ac = 1 - (1 - q(y)) = q(y)$$

Ezek alapján a PDE

- hiperbolikus, ha $b^2 - ac > 0 \iff q(y) > 0 \iff y > 1$
- parabolikus, ha $b^2 - ac = 0 \iff q(y) = 0 \iff |y| < 1$
- elliptikus, ha $b^2 - ac < 0 \iff q(y) < 0 \iff y < -1$

- Kanonikus alakra hozás

- hiperbolikus PDE

$$a = 1, \quad b = 1, \quad c = 1 - q(y) = 1 - 1 = 0$$

$$u''_{xx} + 2u''_{xy} = 0$$

A kanonikus alakból következően a karakterisztikák az alábbi DE megoldásai:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} = \frac{1 \pm 1}{1}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2 \longrightarrow \int dy = 2 \int dx \longrightarrow y = 2x + c \longrightarrow c = y - 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \longrightarrow \int dy = 0 \longrightarrow c = y$$

Ebból a transzformáció:

$$\begin{aligned}\xi &= y - 2x \\ \eta &= y\end{aligned}$$

$$u(x, y) = w(\xi, \eta) = w(y - 2x, y)$$

$$\begin{aligned}u'_x &= 2w'_\xi \\ u''_{xx} &= 4w''_{\xi\xi} \\ u''_{xy} &= -2w''_{\xi\xi} - 2w''_{\xi\eta}\end{aligned}$$

$$u''_{xx} + 2u''_{xy} = 4w''_{\xi\xi} + 2(-2w''_{\xi\xi} - 2w''_{\xi\eta}) = -4w''_{\xi\eta} = 0$$

Így valóban megkaptuk a hiperbolikus PDE kanonikus alakját:

$$w''_{\xi\eta} = 0$$

2. parabolikus PDE

$$a = 1, \quad b = 1, \quad c = 1 - q(y) = 1 - 0 = 1$$

$$u''_{xx} + 2u''_{xy} + u''_{yy} = 0$$

A karakterisztikákat meghatározó DE:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} = 1 \longrightarrow y = x + c \longrightarrow c = y - x$$

Ebben az esetben a transzformáció egyik változója szabadon megadható úgy, hogy a leképezés invertálható legyen $\implies$ Jacobi-mátrixának regulárisnak kell lennie. Az alábbi választással

$$\begin{aligned}\xi &= x \\ \eta &= y - x\end{aligned}$$

az invertálhatóság teljesül, hiszen

$$\det J = \begin{vmatrix} \xi'_x & \xi'_y \\ \eta'_x & \eta'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Innen a kanonikus alakra hozás:

$$u(x, y) = w(\xi, \eta) = w(x, y - x)$$

$$\begin{aligned}u'_x &= w'_\xi - w'_\eta \\ u''_{xx} &= w''_{\xi\xi} - w''_{\xi\eta} - w''_{\eta\xi} + w''_{\eta\eta} = w''_{\xi\xi} - 2w''_{\xi\eta} + w''_{\eta\eta} \\ u''_{xy} &= w''_{\xi\eta} - w''_{\eta\eta} \\ u'_y &= w'_\eta \\ u''_{yy} &= w''_{\eta\eta}\end{aligned}$$

$$u''_{xx} + 2u''_{xy} + u''_{yy} = (w''_{\xi\xi} - 2w''_{\xi\eta} + w''_{\eta\eta}) + 2(w''_{\xi\eta} - w''_{\eta\eta}) + w''_{\eta\eta} = 0$$

$$w''_{\xi\xi} = 0$$

3. elliptikus PDE

$$a = 1, \quad b = 1, \quad c = 1 - q(y) = 1 - (-1) = 2$$

$$u''_{xx} + 2u''_{xy} + 2u''_{yy} = 0$$

A karakterisztikákat megadó DE:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm i\sqrt{ac - b^2}}{a} = \frac{1 \pm i}{1}$$

A megoldás komplex konjugált gyökpár, amelynek bármely tagját választva kihozhatjuk a kívánt transzformációt:

$$\frac{dy}{dx} = 1 - i \longrightarrow \int dy = \int (1 - i)dx \longrightarrow y = x - ix + c \longrightarrow c = y - x + ix$$

A komplex görbe valós és képzetes részével képezzük az új koordinátákat:

$$\begin{aligned} \xi &= \Re\{c\} = x \\ \eta &= \Im\{c\} = y - x \end{aligned}$$

Ez láthatóan ugyanaz a leképezés, mint parabolikus esetben (így a parciális deriváltak is megegyeznek). A különbség a PDE alakjában van:

$$\begin{aligned} u''_{xx} + 2u''_{xy} + 2u''_{yy} &= (w''_{\xi\xi} - 2w''_{\xi\eta} + w''_{\eta\eta}) + 2(w''_{\xi\eta} - w''_{\eta\eta}) + 2w''_{\eta\eta} = 0 \\ w''_{\xi\xi} + w''_{\eta\eta} &= 0 \end{aligned}$$

c) hiperbolikus karakterisztikák felrajzolása (ezen koordinátarendszerben lesz a PDE alakja kanonikus)

$$c = y - 2x \quad c = y, \quad y > 1$$

